# Termschreibweisen

# o++o contra herkömmlich

Klaus Benecke
(Stand: 26.08.2021)

Zur Zeit werden Terme zu kompliziert behandelt. Die vorliegende Ausarbeitung will das begründen und einen Verbesserungsvorschlag unterbreiten. Die wichtigsten Operationen sind die Addition (+) und die Multiplikation (*). Die Operationen gibt es schon länger als das Plus- und das Malzeichen. Terme wurden vor langer Zeit noch in Sätzen formuliert.

`2 und 3 mal 4`

Haben sie die Eigenschaft, dass man sie von links nach rechts auswertet?
Den obigen Beispielsatz sollten wir heute durch

`2+3*4`

abkürzen.
Betrachtet man diesen Term unabhängig von dem obigen Problem, so kann man hier zunächst 2 verschiedene Klammernpaare setzen und bekommt dann auch unterschiedliche Ergebnisse:

```
(2+3)*4 = 20
2+(3*4) = 14
```

Diese beiden Ergebnisse sind mathematisch gesichert. Dem Term

`2+3*4`

einen dieser beiden Terme (Werte) zuzuordnen, ist jedoch keine Mathematik. Es ist eine Frage der Konvention. D.h., in erster Linie welche Konzepte hinter den beiden Möglichkeiten sind natürlicher und welche kann man sich leichter einprägen bzw. erlernen. Da Schüler der Unterstufe und sehr viele andere Menschen stets zur ersten Lösung neigen (Sie haben die Regeln, die mit „Punkt- vor Strichrechnung“ in Zusammenhang stehen, noch nicht in der Schule gehabt oder haben sie wieder vergessen, da sie sehr unnatürlich sind.), sollten wir diese wählen, obwohl zur Zeit noch die „unnatürliche Konvention“ in der Schule gelehrt wird. Das jetzige Chaos in dieser Frage sollte so beseitigt werden, da auch viele einfachere (natürlichere) Taschenrechner sowie der Windowsrechner im Standardmodus ebenfalls 20 ermitteln. Neben o++o trifft das auch auf die Programmiersprache Smalltalk zu.

**Heute „noch“ übliche Schreibweise für mathematische Terme:**

1. Die binären Operationen +, *, -, :, mod werden infix geschrieben; z.B. 1+2.
2. Die Exponenten binärer Potenz- und Exponentialfunktionen werden höher gesetzt; es gibt kein Symbol hierfür (z.B.: $3^4$ ).
3. Die Wurzel besitzt eine gesonderte Schreibweise: Das Zeichen √ mit oberem Strich, welcher die Klammern ersetzt.
4. Der Absolutbetrag wird durch zwei „|“ Zeichen ausgedrückt, so dass sie die Klammern ersetzen.
5. Die unäre Fakultätsfunktion (!) wird postfix geschrieben; z.B.: 4! =24
6. Die verbleibenden unären Funktionen werden prefix geschrieben; z.B.: `sin(3,1415)` oder auch `sin 3,1415` .
7. Die verbleibenden binären und mehrstelligen Operationen werden präfix mit Klammern geschrieben, wobei die Inputwerte durch Komma getrennt werden. 2 Beispiele:

`f(x+7,9)` (die binäre Funktion `+` infix und die binäre Funktion `f` präfix)
`subtext(“Heute ist Sonntag“,1,5)` (=“Heute“).

8. Klammern werden zuerst ausgewertet.
9. Fakultät zuerst
10. häufig: unäre Funktionen zuerst
11. Potenz- und Wurzelrechnung geht vor Punktrechnung.
12. Punkt- geht vor Strichrechnung.
13. Bei Potenzen wird von rechts nach links gerechnet.
14. Bei mehreren Operationen der gleichen Rangfolge wird von links nach rechts gerechnet.
15. Es wird von links nach rechts geschrieben.

**Magdeburger Notation für mathematische Terme:**

1. Alle Operationen (Funktionen) folgen dem ersten Inputwert; hat eine Operation mehr als 2 Inputwerte, so werden die weiteren Inputwerte durch ! getrennt.
2. Klammern werden zuerst ausgewertet.
3. Es wird von links nach rechts gelesen, geschrieben, gerechnet und gedacht.

**Formale Magdeburger Termdefinition:**

1. Jede Konstante und jede Variable ist ein Term.
2. Ist ***t*** ein Term und ***op1*** ein einstelliges Operationssymbol, so ist ***t op1*** auch einTerm.
3. Sind ***t1*** und ***t2*** Terme und ***op2*** ein zweistelliges Operationssymbol, so ist ***t1 op2 t2*** ein Term.
4. Sind ***t1, t2, …, tn*** Terme und ist ***op*** ein n-stelliges Operationssymbol, so ist
   ***t1 op t2!t3! … !tn*** ein Term.
5. Ist ***t*** ein Term, so auch ***(t)***

**Kritik am heute üblichen Rechnen:**

1. Die Regeln schließen noch keine Strukturen wie Texte, Listen, Mengen und Tabellen ein. Dann würde es noch komplizierter werden und es könnten noch mehr Widersprüche auftreten.
2. Kinder und Personen, die die Vorrangregeln lange nicht benutzt hatten, ermitteln bei der Aufgabe 1+2*3 stets 9, genau wie o++o, Smalltalk, viele Taschenrechner und der Windowsrechner im Modus normal.
3. Eine „lange“ Rechnung 21+52-92+3-7*2 ... kann kaum jemand im Kopf rechnen; jedoch als o++o-Term, da einfach von links nach rechts gerechnet wird. Man muss sich deshalb stets nur ein Ergebnis bis zur nächsten Operation merken.
4. Die unter 2 bis 5 angegebenen heutigen Schreibweisen werden in Programmiersprachen nicht verwendet und sind generell schwer mit dem Computer zu händeln. Die entsprechenden o++o Schreibweisen lauten:

| **Herkömmliche Schreibweise** | **Magdeburger Notation** |
|---|---|
| $3^4$ | `3 hoch 4` |
| √3 +4 | `3 sqrt +4` |
| \|3+4\| -5 | `3+4 abs -5` |
| 40! | `1 .. 40 **` |

5. Die Kommaschreibweise von Dezimalzahlen wird in Programmiersprachen nicht benutzt. Bei einer zweistelligen Funktion `f23(x,y)=2*x+3*y` führt der Ausdruck f23(3,4,5) zu

Problemen, da f23((3,4),5) oder f23(3,(4,5)) gemeint sein kann. (o++o: `3.4 f23 5` oder `3 f23 4.5`).

6. Die Regeln für Potenzen werden uneinheitlich in Computersystemen genutzt:
   2^3^4 = (2^3)^4 = 4096 (EXCEL und Libre Office Calc)
   2^3^4 = 2^(3^4) = 2.4178516e+24 (Google Search)
7. Die Regel für das unäre Minus wird uneinheitlich verwendet:
   - 3 ^ 2 = (-3)^2 = 9 (EXCEL und Libre Office Calc)
   - 3 ^ 2 = -(3^2) = - 9 (Programmiersprache basic calculator)
8. 10 - 3 +2 ist 9, nicht wie die PEMDAS-Abkürzung fälschlich folgern lässt 5 (Addition vor Subtraktion).
9. In einigen Computersystemen ist `sin 3x` = `sin(3x)` und in anderen `sin(3)*x` .
10. In EXCEL kann man nicht `sin 3` schreiben, sondern `sin(3)`.
11. Unäre Funktionen zuerst heißt beispielsweise:
    `2 + sin pi+3*4=(2+(sin pi))+(3*4)`
12. Durch „Punkt vor Strich“ muss man insgesamt mehr Klammern setzen, da
    `1+2*3 = 2*3+1` gilt.
    In o++o kann man
    `(1+2)*3` durch `1+2*3` und
    `1+(2*3)` durch `2*3+1` ausdrücken.
13. Es wird keine Semantik für mehrzeilige Ausdrücke bereitgestellt. Ein Computerprogramm geht aber in der Regel über mehrere Zeilen.
    o++o:
    ```
    1+2+8
    * 2+3
    ```
    = 55 (hierbei werden 4 Klammern gegen ein RETURN eingespart)

Für 6.- 9. siehe (Englische Wikipedia „order of Operations“)

Das folgende mehrzeilige o++o-Programm, das `2700` ergibt, kann man 2 zeilig schreiben, wenn man der Tabelle den Namen `dreienkel.tab` gibt:

```
<TAB!
NAME,  ORT,    STIP l
Paul   Oehna   1000
Clara  Oehna    900
Sophia Dallgow  800
!TAB>
++

dreienkel.tab
++
```

Mehrzeiligkeit sollte stets bedeuten, dass man von oben nach unten rechnet. Damit wäre aber die postfixe Schreibweise für unäre Operationen bereits vorbestimmt:
`dreienkel.tab ++`

**Nachteile der Magdeburger Notation**

1. Die Polynomschreibweise wie z.B. $x^3+2x^2+3x+4$ muss umgeschrieben werden in
   `x+2*x+3*x+4`
   oder
   `X poly [1 2 3 4]`
   oder

X hoch 3 + (X hoch 2 *2) + (X*3)+4.
Die erste Schreibweise hat dafür den Vorteil effizienter realisierbar zu sein und die zweite den Vorteil bequemer eintippbar zu sein.
Wenn das Polynom für x=87 berechnet werden soll, muss man lediglich schreiben
87 poly 1 2 3 4.

2. Einige Menschen müssen umdenken.
3. Ein Teil der Mathematikbücher müsste aktualisiert werden.

Es folgt eine Gegenüberstellung beider Notationen durch weitere Beispiele, wobei einige neue Symbole enthalten sind, deren Bedeutung aus dem Zusammenhang ersichtlich wird.

| **MD-Notation** | **Herkömmliche Notation** | **Ergebnis bzw. Bemerkung** |
|---|---|---|
| 1+2*3 | (1+2)*3 | 9 |
| 2*3+1 | 2*3+1 | 7 |
| 2 sin | sin 2 oder sin(2) | 0.909297426826 |
| -4 abs sqrt | sqrt(\|-4\|) | 2. |
| 3+4*5+6 | (3+4)*5+6 | 41 |
| 1 4 7 4 ++<br>= [1 4 7 4] ++ | 1+4+7+4 oder<br>sum([1;4;7;4]) | 16 |
| 2.30 3.72 4.77 *1.19 | 2.30*1.19,3.72*1.19,4.77*1.19 | 2.737 4.4268 5.6763 |
| 3 .. 6 ** | 6!/2! | 360 |
| -16 abs sqrt sqrt | sqrt(sqrt(\|-16\|)) | 2. |
| 37 hoch 3 | 37 ^ 3 oder $37^3$ | 50653 |
| 37 poly [1 2 3 4] | 37^3+2*37^2+3*37+4 | 53506 |
| 1 2 2 1 3 1 ++: rnd 1 | rnd(avg([1 2 2 1 3 1]),1) | 1.7 |
| pi+3*2 cos abs sqrt | sqrt(abs(cos((pi+3)*2))) | 0.979882792302 |
| X sin + (2 cos) sqrt | sqrt(sin(x) + cos(2)) | |
| -1 … 5!0.000001 sin max | | näherungsweises Maximum der Sinusfunktion im Intervall [-1, 5] |
| 0 ...pi!0.0001 cos abs *0.0001 ++ | | näherungsweises bestimmtes Integral von \|cos(x)\| |
| 1+2<br>*3+4 | (1+2)*(3+4) | 21 |
| 1*2<br>+3*4 | 1*2+3*4 | 14 |

Aufgrund der geschilderten Probleme schlage ich vor, die Magdeburger Notation einzuführen. Es sei angemerkt, dass o++o vor 2 Jahren auch im Sinne der heutigen Schulmathematik gerechnet hat, so dass o++o auch wieder zurückgesetzt werden **könnte**. Damit würde sich aber die Lesbarkeit unserer Programme wesentlich verschlechtern.
0 ...pi!0.0001 cos abs sqrt *0.0001 ++
würde dann in folgender Weise geschrieben werden müssen:
++(sqrt(abs(cos(...(0,pi,0.0001))))*0.0001)

oder gar
```
++(sqrt(|cos(...(0,pi,0.0001)|)*0.0001)
```

Viele Zeitungen und andere Medien beschäftigen sich auch mit Knobelaufgaben. In Facebook wird festgestellt, dass viele Erwachsene die Aufgabe
```
8 ÷ 2 x (2 + 2)
```
nicht richtig lösen können. Das Gleiche bestätigt eine deutsche Zeitung für die Aufgabe
```
9 – 3 : 1/3 + 1
```
Bei der ersten Aufgabe wird konstatiert, dass Punkt- vor Strichrechnung gilt, aber für ÷ und `x` keine entsprechende Regel existiert. Daher muss man von links nach rechts rechnen. Daher folgern wir, dass die letzte Aussage zur Zeit zu wenig im Schulunterricht vermittelt wird. Man muss oft „Punkt vor Strichrechnung“ wiederholen, so dass weniger Zeit für die wichtigere Regel „von links nach rechts“ bleibt.
Darüber hinaus wird das Verständnis von „Punkt- vor Strichrechnung“ erschwert, wenn der „Punkt“ ein x ist und das Divisionszeichen einen Strich enthält.
Viele Menschen wissen nicht, welches das Multiplikationszeichen auf der Rechnertastatur ist. Sie wählen häufig den Buchstaben x.
Wir können nicht so viel lehren bzw. lernen, wie wir wollen. Das menschliche Gehirn hat begrenzte Fähigkeiten. Außerdem ist der IQ in Westeuropa in den letzten 30 Jahren wegen des Privatfernsehens (laut Wikipedia) gesunken.
Daher glaube, ich dass man in der Schule auch viele bekannte mathematische Notationen über Bord werfen sollte, wenn man ernsthaft das Ziel verfolgt, dass jeder eine Programmiersprache erlernen soll.

- Kommaschreibweise für Dezimalzahlen
- Betragsstriche
- Fakultätszeichen
- Wurzelzeichen
- Potenzschreibweise
- Polynomschreibweise
- ...

**Zusammenfassung:**
**Die Konzepte werden sich durchsetzen, die den geringsten Lernaufwand erfordern, die nicht so schnell vergessen werden und deren Repräsentationen am besten lesbar sind, die vom Computer verstanden werden und für die Standards existieren.**